

УДК 616.12–008.331.1

В. Д. Кревчик, В. Э. Олейников,
И. Б. Матросова, Л. И. Гусаковская, Н. В. Сергацкая

КЛИНИКО-ГЕМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОСЛЕДСТВИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЯМОЙ И ОТРАЖЕННОЙ ПУЛЬСОВЫХ ВОЛН

Аннотация. Исследовано частное решение в виде бегущей волны линеаризованной системы уравнений движения крови в кровеносном сосуде. Рассмотрена зависимость скорости прямой, отраженной от бифуркации и результирующей пульсовых волн от времени в достаточно широком диапазоне параметров, определяющих переменность физико-механических свойств кровеносного сосуда с учетом различного рода патологий. Показано, что пульсовая волна, отраженная от бифуркации ригидных сосудов, возвращается раньше – не в диастолу, а в систолу, при этом амплитуда ее скорости существенно возрастает. Установлено, что аналогичная ситуация имеет место и с ростом объема депонированной после отражения пульсовой волны крови. Выявлены особенности результирующей пульсовой волны в виде колебаний скорости в период систолы, связанные с ригидностью сосудов и ростом объема депонированной крови.

Ключевые слова: прямая и отраженная пульсовая волны, линеаризованная система уравнений Навье – Стокса, решение типа бегущей волны, скорость и фаза отраженной пульсовой волны, аортальная жесткость, ригидность сосудов после бифуркации, объем депонированной крови после отражения пульсовой волны.

Abstract. The particular resolving in the form of a traveling wave of linearized equations of blood motion in a blood vessel was studied. The dependence of the direct, reflected from the bifurcation, and the resulting pulse waves from the time over the wide range of parameters that determine the variability of blood vessel's physical and mechanical properties, taking into account various kinds of pathologies was evaluated. It was shown, that pulse wave, reflected from the bifurcation of rigid vessels, returns earlier – not in diastole, but in systole, while the amplitude of its velocity increases significantly. It was established, that the analogical situation take place also in case of volume increasing of the blood deposited after pulse wave reflection. The features of the resulting pulse wave in form of velocity oscillations during systole associated with vessel's rigidity and increasing the blood deposited volume, were identified.

Keywords: direct and reflected pulse wave, the Navier – Stokes linearized equations, the resolving kind of traveling wave, velocity and phase of the reflected pulse wave, aortic stiffness, rigidity of blood vessels after bifurcation, the amount of deposited blood after pulse wave reflection.

Введение

В настоящее время известны два механизма влияния эластических свойств артериальной системы на артериальное давление (АД) [1]. Первый обеспечивается сердечным выбросом из левого желудочка (ЛЖ) в аорту. В неизменной эластичной аорте часть крови «задерживается», ударный объем при этом несколько уменьшается. При увеличении аортальной жесткости снижение количества задерживаемой крови ведет к повышению систолического АД (САД). Диастолическая отдача при этом уменьшается, приводя к снижению диастолического АД (ДАД).

Второй механизм представляет собой взаимодействие прямой и отраженной пульсовых волн (ПВ). В систему из ЛЖ в аорту выбрасывается волна давления, которая распространяется по всей артериальной системе. В местах сужений и разветвлений артерий эта волна отражается и в случае эластичных сосудов возвращается в восходящую аорту в период диастолы, обеспечивая тем самым ДАД и усиливая коронарную перфузию. В ригидных артериях скорость ПВ увеличивается, и отраженная волна возвращается раньше – не в диастолу, а в систолу. Это приводит к повышению пикового и конечного систолического давления в восходящей аорте, что вызывает увеличение постнагрузки на ЛЖ и усиление потребления миокардом кислорода. Смещение «возвращения» отраженной ПВ способствует дальнейшему снижению ДАД. Необходимо отметить, что гемодинамике сосудов посвящается немало работ (см. например [2–6]). Однако в большинстве из них при анализе эксперимента обычно используются численные методы, обладающие хорошо известными недостатками, наиболее существенный из которых – отсутствие возможности исследования свойств прямой и отраженной ПВ в широком диапазоне актуальных параметров.

В настоящей работе в рамках использованных приближений предпринята попытка аналитического подхода к изучению взаимодействия прямой и отраженной ПВ, а также к исследованию влияния аортальной жесткости, ригидности сосудистого русла вблизи бифуркации аорты, объема депонированной после отражения ПВ крови на параметры результирующей ПВ.

1. Постановка краевых задач для прямой и отраженной ПВ

Для описания ПВ будем использовать классические методы гидродинамики применительно к сердечно-сосудистой системе человека. С позиций классической гидродинамики движение любой реальной среды описывается уравнением Навье – Стокса, которое в совокупности с уравнениями неразрывности, состояния и баланса тепла образуют замкнутую систему [7–9]. Решение такой системы в общем виде сопряжено с принципиальными математическими трудностями. Однако, как будет показано ниже, в ряде конкретных случаев удастся получить аналитическое решение.

В работе [2] сформулированы условия, при которых возможна линеаризация уравнений указанной выше системы. В результате при условии термостатирования и справедливости гипотезы квазистационарности имеем линеаризованный вариант уравнений Навье – Стокса [2]:

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\lambda \cdot \rho_0}{4r_0} v^2, \\ -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{E_{\text{пр}}} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}, \end{cases} \quad (1)$$

где $v = Q/(\pi r_0^2)$ – средняя скорость в сечении r_0 при заданном расходе среды Q ; $E_{\text{пр}} = E / (1 + 2r_0 / (\delta \cdot E' \beta_0))$; $E' = E / (1 - \nu)$ – модуль упругости материала стенки; ν – коэффициент Пуассона; β_0 – сжимаемость среды в трубке; δ – толщина стенки; P – осредненное давление по сечению сосуда; λ – коэффи-

циент гидравлического сопротивления в формуле Дарси – Вейсбаха, который можно определить по двум главным параметрам шероховатости стенки трубки и числу Рейнольдса Re [10]; ρ_0 – плотность крови.

Необходимо отметить, что $E_{np} = f(\delta, \beta_0, E', r_0)$ определяет изменение физико-механических свойств сосуда с учетом различного рода патологий [2]. При этом линеаризованная система уравнений (1) может быть использована для анализа режима кровотока в сосудах любого типа и позволяет моделировать различные возможные патологии.

Обратимся к решению системы уравнений (1). Продифференцируем обе части второго уравнения системы (1) по x :

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{E_{np}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right), \text{ или}$$

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{E_{np}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right). \quad (2)$$

Дифференцируя обе части первого уравнения системы (1) по t , получим

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) = \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\lambda \rho_0}{4r_0} \cdot 2v \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (3)$$

Используя (2) и (3), получим нелинейное уравнение, определяющее зависимость $v(x, t)$:

$$b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + av \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (4)$$

где $b = E_{np} / \rho_0$; $a = \lambda / (2r_0)$.

Введем новые переменные $\tau = at$ и $z = a \cdot b^{-1/2} \cdot x$, тогда уравнение (4) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + v \frac{\partial v}{\partial \tau}. \quad (5)$$

Путем непосредственной подстановки нетрудно убедиться, что одним из частных решений уравнения (5) является решение типа бегущей волны:

$$v(x, t) = 2C_1 \operatorname{th} \left[C_1 \frac{\lambda(a \cdot b^{-1/2} \cdot x - \lambda \cdot at)}{1 - \lambda^2} + C_2 \right], \quad (6)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Соотношение (6) описывает прямую ПВ. Для исследования зависимости скорости ПВ от времени необходимо определить C_1 и C_2 , т.е. задать соответствующие краевые условия, которые мы выбираем в виде

$$\begin{cases} v(0, t) = v_0 f_1(t), \\ v(x, 0) = f_2(x), \end{cases} \quad (7)$$

где

$$f_1(t) = \begin{cases} \sin \omega t, & \text{если } \sin \omega t > 0, \\ 0, & \text{если } \sin \omega t < 0, \end{cases} \quad (8)$$

здесь $\omega = 2\pi/(t_s + t_d)$; t_s и t_d – время систолы и диастолы соответственно;
 $f_2(x) = \beta_1(x - x_0)^2$; $\beta_1 = 9,2 \text{ м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$; $x_0 = 0,07 \text{ м}$.

На рис. 1 схематично представлены графики функции $v_0 \cdot f_1(t)$ (рис. 1,а) и $f_2(x)$ (рис. 1,б).

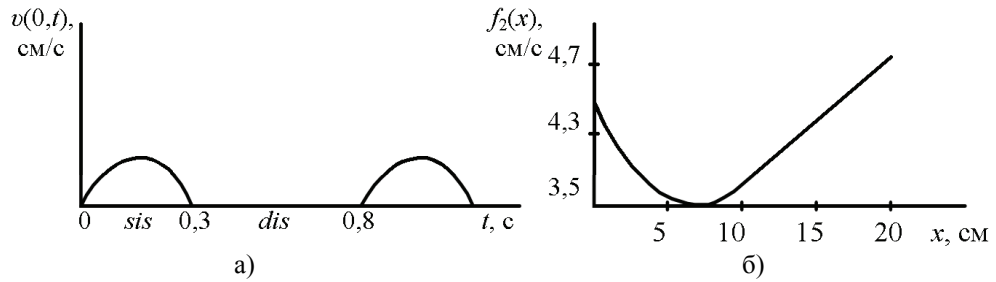


Рис. 1. Краевые условия для функции $v(x,t)$:
 а – граничное условие; б – начальное условие (взято из работы [6])

Таким образом, для определения C_1 и C_2 мы имеем систему двух трансцендентных уравнений (7), которая может быть решена только численно. В случае отраженной ПВ формула (6) переписывается в виде

$$v_R(x,t) = -2C_3 th \left[C_3 \lambda \frac{(a \cdot b^{-1/2} \cdot x - \lambda \cdot at)}{1 - \lambda^2} + C_4 \right]. \quad (9)$$

Соответствующие краевые условия запишутся как

$$\begin{cases} v_R(l,t) = v_1 \cdot f_3(t), \\ v_R(x,0) = f_2(x), \end{cases} \quad (10)$$

где l – длина сосуда,

$$f_3(t) = \begin{cases} \sin(\omega t + \varphi), & \text{если } \sin(\omega t + \varphi) < 0, \\ 0, & \text{если } \sin(\omega t + \varphi) > 0. \end{cases} \quad (11)$$

Для определения скорости v_1 и фазы φ отраженной ПВ рассмотрим простейшую модель неупругого отражения ПВ от бифуркации сосуда. Используя второй закон Ньютона и формулу для работы силы давления, получим

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{1 - \beta \cdot n \cdot \gamma^2 + 2P \cdot S_1 \cdot \Delta r \cdot n / (m_0 v_0^2)}{1 - n \cdot \beta}}; \quad (12)$$

$$\varphi = \omega \cdot \Delta t = \frac{\omega v_0}{P \cdot S_1} \left[1 - (1 - n\beta) \frac{v_1}{v_0} + \beta \cdot n \cdot \gamma \right], \quad (13)$$

где $\beta = \Delta m / m_0$; $m_0 - \Delta m$ – масса депонированной крови после отражения ПВ; m_0 – масса крови до отражения ПВ; $\gamma = \Delta v / v_0$; Δv – скорость потока крови после бифуркации; n – число разветвлений вблизи бифуркации; $S_1 = \pi r_0^2$ – площадь поперечного сечения сосуда, по которому распространяется ПВ; Δr – радиус сосуда в разветвлении; P – давление.

Как и в случае (7), система уравнений (10) является системой трансцендентных уравнений и может быть решена относительно C_3 и C_4 только численно.

2. Анализ взаимодействия прямой и отраженной ПВ

Рассмотрим влияние аортальной жесткости на скорость ПВ. На рис. 2,а представлена зависимость скорости прямой (верхняя часть рис. 2,а) и отраженной (нижняя часть рис. 2,а)

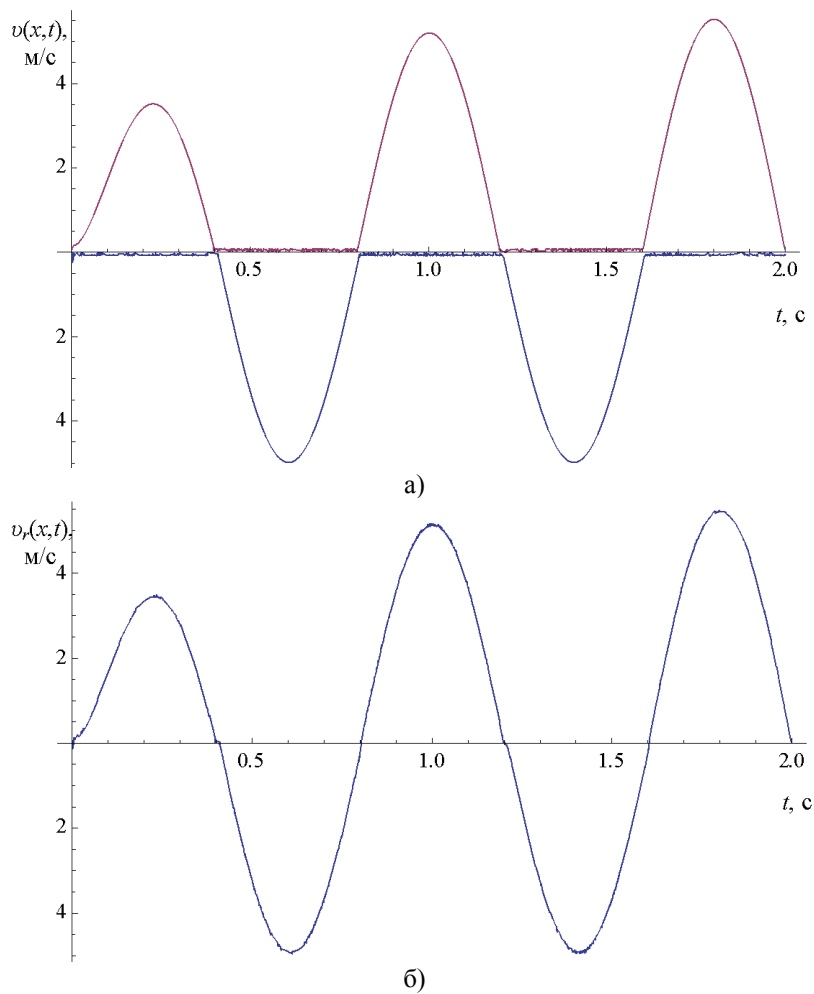


Рис. 2. Зависимость скорости ПВ от времени для $\beta = 0,3$, $\gamma = 1,1$, $v_0 = 6$ м/с, $l = 0,2$ м, $E_{\text{пр}}^* = 10^6$ Н/м², $P = 2 \cdot 10^4$ Па, $S_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ м², $m_0 = 0,04$ кг, $\Delta r = 10^{-4}$ м, $n_0 = 10$ м :
а – в верхней части рисунка – прямая ПВ, в нижней части – отраженная ПВ;
б – результирующая ПВ

Пульсовая волна от времени в условиях депонированной после отражения ПВ крови составляет 70 % при примерно одинаковой ригидности сосуда, по которому распространяется ПВ, и сосудов после бифуркации. В этом случае имеет место идеальная ситуация: отраженная ПВ приходит в диастолу (см. рис. 2,а), как в норме. На рис. 3,а изображена такая же зависимость, только для случая более высокой ригидности.

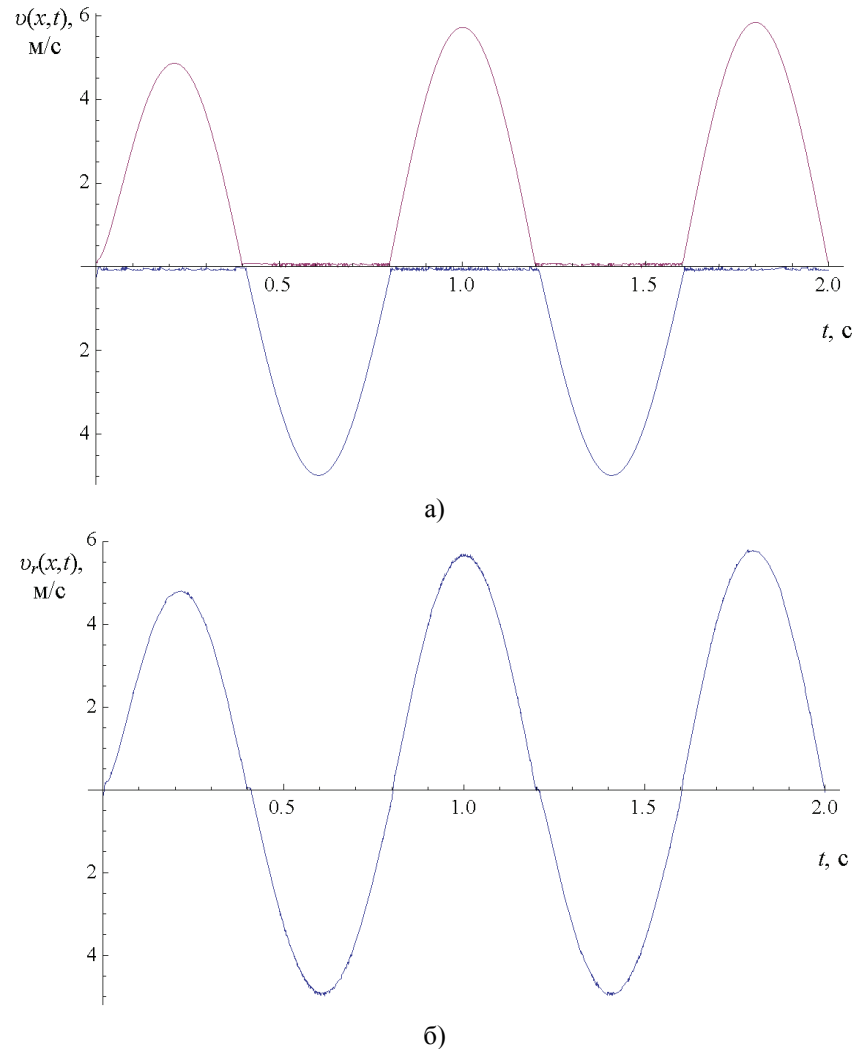


Рис. 3. Зависимость скорости прямой (верхняя часть рис. 3), отраженной (нижняя часть рис. 3,а) и результирующей ПВ (рис. 3,б) от времени для случая более высокой аортальной ригидности $E_{пр} = 10^7 \text{ Н/м}^2$

Из сравнения рис. 2,а и рис. 3,а видно, что, как и следовало ожидать, с ростом ригидности сосуда амплитуда скорости ПВ возрастает, чем обеспечивается первый механизм влияния эластических свойств артериальной системы на АД, рассмотренный во введении данной статьи. На рис. 4,а изображена та же зависимость, что и на рис. 2,а, только для случая, когда скорость ПВ оказывается в два раза больше (высокая ригидность сосуда).

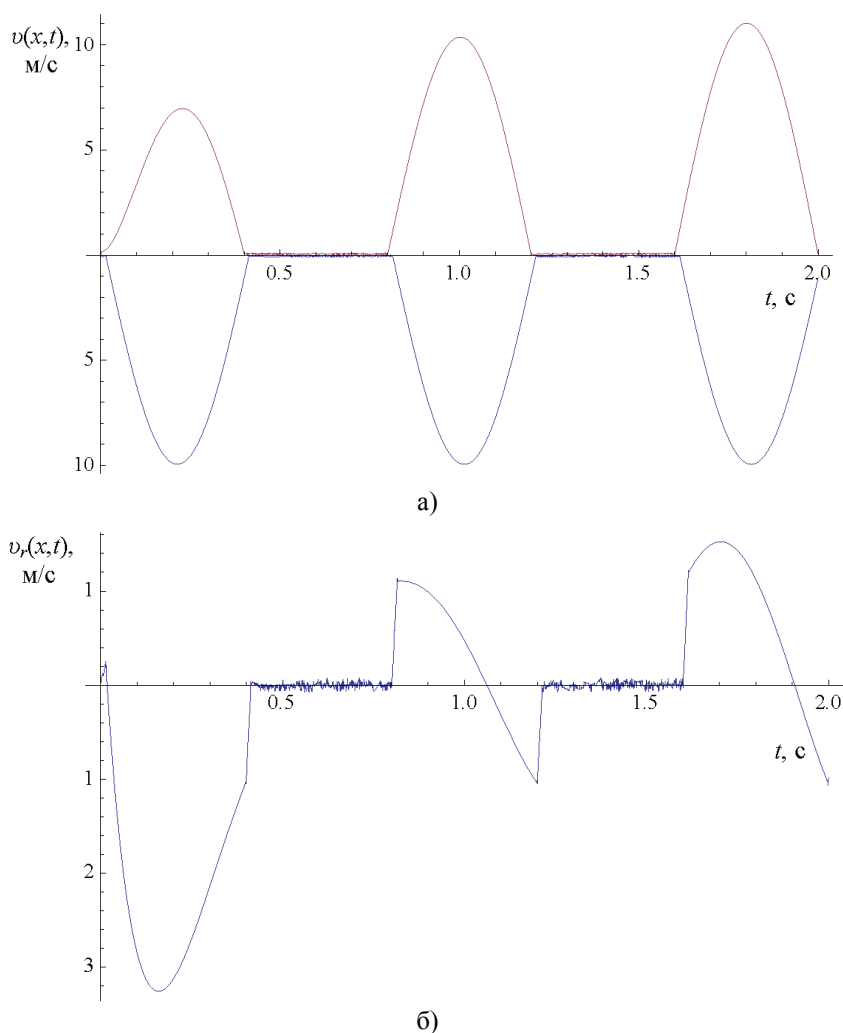


Рис. 4. Зависимость скорости прямой (верхняя часть рис. 4,а), отраженной (нижняя часть рис. 4,а) и результирующей ПВ (рис. 4,б) от времени для случая, когда скорость прямой ПВ увеличилась в 2 раза $v_0 = 12$ м/с

Можно видеть (см. рис. 4,а), что в этом случае отраженная ПВ приходит в систолу, что обеспечивает второй механизм влияния эластических свойств артериальной системы на АД, рассмотренный во введении. Следует отметить существенное влияние на скорость отраженной ПВ ригидности сосудов после бифуркации, определяемую параметром $\gamma = \Delta v/v_0$. На рис. 2 мы имеем практически идеальную ситуацию (результатирующая волна, представленная на рис. 2,б, является «идеальной синусоидой» при $\gamma = 1,1$). С ростом параметра γ ситуация, как видно из рис. 5, кардинально меняется: отраженная ПВ приходит в систолу, а не в диастолу, как в норме. И, наконец, выясним роль параметра $\beta = \Delta m/m_0$, который определяет объем депонированной крови после отражения ПВ. Как видно из сравнения рис. 5 и 6, параметр β также оказывает влияние на «смещение» ПВ и ее амплитуду скорости после отражения.

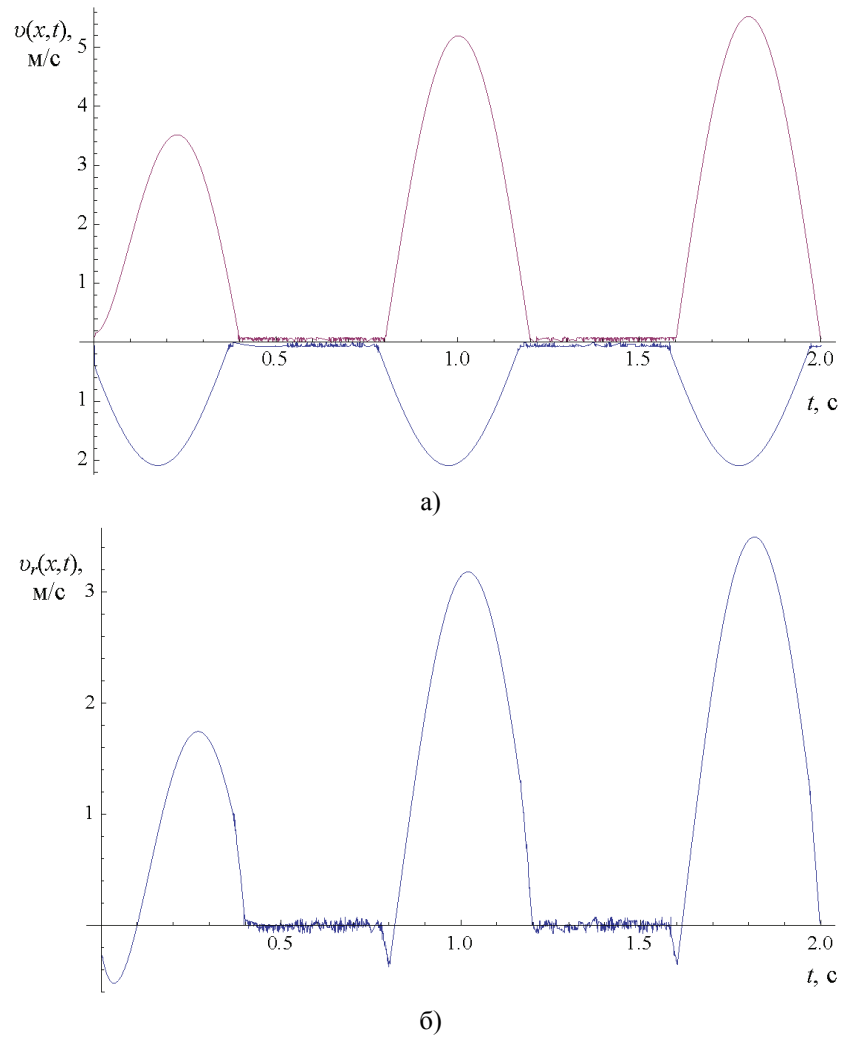


Рис. 5. Влияние параметра γ на зависимость скорости прямой (верхняя часть рис. 5,а), отраженной (нижняя часть рис. 5,а) и результирующей ПВ (рис. 5,б) от времени $\beta = 0,3$, $\gamma = 1,26$, $l = 0,2$, $E_{пр} = 10^6$ Н/м²

Таким образом, второй механизм влияния эластических свойств артериальной системы на АД может быть дополнен с учетом влияния параметров γ и β : ПВ, отраженная от бифуркации ригидных сосудов, возвращается раньше – не в диастолу, а в систолу, при этом амплитуда ее скорости существенно возрастает. С ростом объема депонированной после отражения ПВ крови происходит смещение отраженной ПВ в систолу и рост амплитуды ее скорости.

Из рис. 4,б–6,б видно, что смещение ПВ существенно влияет на параметры результирующей ПВ. Рост ригидности сосуда, как видно из рис. 4,б, может приводить к изменению направления скорости результирующей ПВ в период систолы за счет роста амплитуды скорости отраженной ПВ (рис. 4,а). В меньшей степени подобные колебания скорости результирующей ПВ имеют место в случае ригидности сосудов после бифуркации, которая определяется величиной параметра γ (см. рис. 5,б).

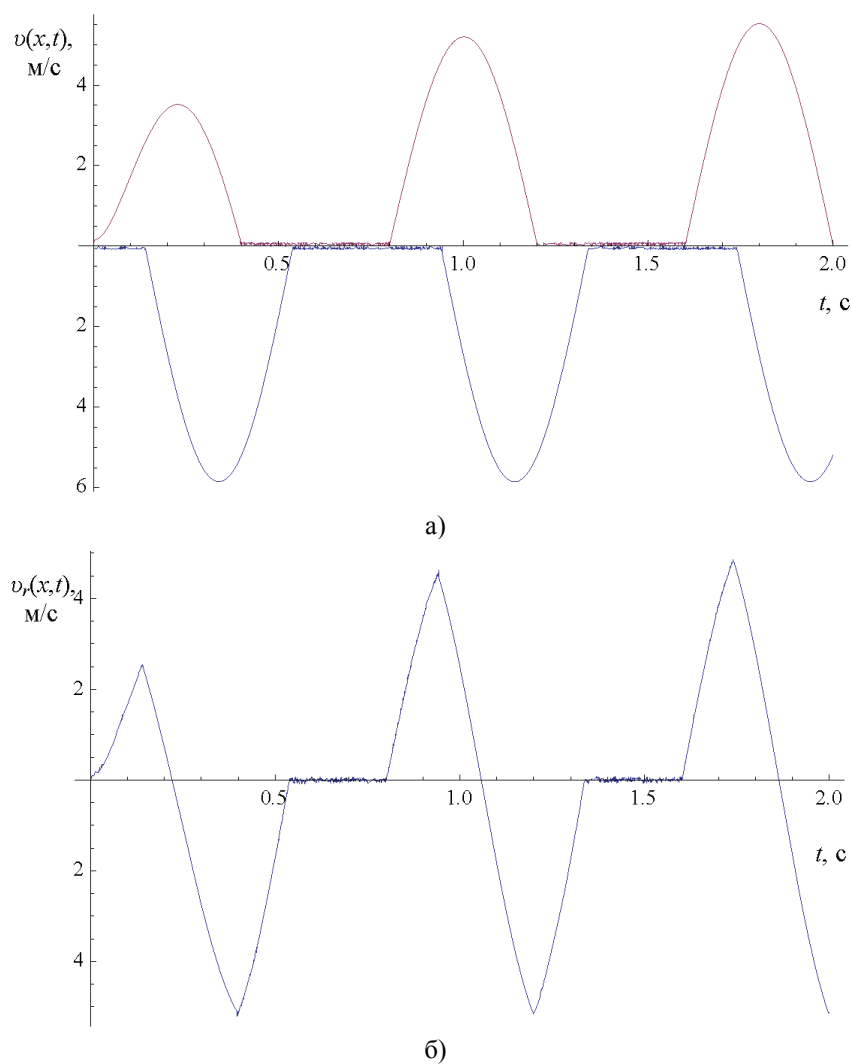


Рис. 6. Влияние параметра β на смещение ПВ: а – в верхней части рисунка – прямая ПВ, в нижней части – отраженная ПВ; б – результирующая ПВ; $\beta = 0,1$, $\gamma = 1,1$, $l = 0,2$, $E_{\text{пр}} = 10^6 \text{ Н/м}^2$

С ростом объема депонированной после отражения ПВ крови амплитуда колебаний скорости результирующей ПВ в систоле значительно возрастает (см. рис. 6,б). В заключение отметим, что рассмотренные выше патологии стенок сосуда заметно сказываются на параметрах отраженной и результирующей ПВ. В этой связи необходима разработка методов измерения данных параметров, которые в сочетании с теоретическими результатами позволят проводить эффективные оценки состояния сосудов.

Список литературы

1. **Олейников, В. Э.** Сосудистое ремоделирование при артериальной гипертензии у лиц старше 60 лет. Возможности медикаментозной коррекции / В. Э. Олейников, И. Б. Матросова, Н. В. Борисочева // Человек и лекарство : труды XVI российского национального конгресса. – М., 2010. – Т. 2. – С. 200–217.

2. **Шлык, Ю. К.** Использование методов решения задач гидродинамики применительно к сердечно-сосудистой системе человека / Ю. К. Шлык, Н. П. Медведева // Вестник кибернетики. – 2007. – № 6. – С. 110–115.
3. **Мишук, В. А.** Реализация математической модели элементарного сосудистого участка в среде LabVIEW, ориентированной на кардиохирургическую клинику / В. А. Мишук // Клиническая физиология кровообращения. – 2006. – № 4. – С. 67–81.
4. **Борекня, Л. А.** Проблемы исследования ритмов в кардиологии / Л. А. Борекня, В. И. Кузьмин, И. В. Ключников // Клиническая физиология кровообращения. – 2006. – № 4. – С. 5–11.
5. **Мосткова, Е. В.** Математическая модель сердца / Е. В. Мосткова // Клиническая физиология кровообращения. – 2006. – № 4. – С. 26–33.
6. **Пирумов, У. Г.** Аналитическое и численное исследование гемодинамики крупных сосудов / У. Г. Пирумов // Математическое моделирование. – 2001. – Т. 13. – № 6. – С. 47–61.
7. **Лойцянский, Л. Г.** Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М. : Наука, 1970. – 904 с.
8. **Джеймсон, Э.** Численные методы в динамике жидкости / Э. Джеймсон, Т. Мюллер [и др.]. – М. : Мир, 1981. – 408 с.
9. Гидродинамика кровообращения : сборник переводов / под ред. С. А. Регигера. – М. : Мир, 1971. – 270 с.
10. **Бегун, П. И.** Моделирование в биомеханике / П. И. Бегун, П. Н. Афонин. – М. : Высшая школа, 2004. – 390 с.

Кревчик Владимир Дмитриевич

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
физики, Пензенский государственный
университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

Krevchik Vladimir Dmitrievich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of physics, Penza state university

Олейников Валентин Эливич

доктор медицинских наук, профессор,
заведующий кафедрой терапии,
Медицинский институт, Пензенский
государственный университет

E-mail: terapia-pgu@rambler.ru

Oleynikov Valentin Elivich

Doctor of medicine, professor,
head of sub-department of therapeutics,
Medical institute, Penza state university

Матросова Ирина Борисовна

кандидат медицинских наук, доцент,
кафедра терапии, Медицинский
институт, Пензенский
государственный университет

E-mail: terapia-pgu@rambler.ru

Matrosova Irina Borisovna

Candidate of medical sciences, associate
professor, sub-department of therapeutics,
Medical institute, Penza state university

Гусаковская Людмила Ивановна

ассистент, кафедра терапии,
Медицинский институт, Пензенский
государственный университет

E-mail: terapia-pgu@rambler.ru

Gusakovskaya Lyudmila Ivanovna

Assistant, sub-department of therapeutics,
Medical institute, Penza state university

Сергацкая Надежда Валерьевна

аспирант, Медицинский
институт, Пензенский
государственный университет

E-mail: terapia-pgu@rambler.ru

Sergatskaya Nadezhda Valeryevna

Postgraduate student, Medical institute,
Penza state university

УДК 616.12–008.331.1

Кревчик, В. Д.

Клинико-гемодинамические последствия взаимодействия прямой и отраженной пульсовых волн / В. Д. Кревчик, В. Э. Олейников, И. Б. Матросова, Л. И. Гусаковская, Н. В. Сергацкая // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Медицинские науки. – 2010. – № 4 (16). – С. 129–139.